Université Paris-Diderot Année 2013-2014
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Feuille de TD 2 - Propriétés de $\mathbb{R}$

Exercice 1. Hachurez la région du plan Oxy définie par l'équation ou par les inégalités.

(a) $|x| = |y|$; (b) $|x| + |y| = 1$; (c) $|x| - |y| = 2$; (d) $|xy| = 2$;
(e) $|x| \leq |y|$; (f) $|x| + |y| \leq 1$; (g) $|x| - |y| \leq 2$; (h) $|xy| \geq 2$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $x < |x-1|$, (b) $x < -|x-1|$, (c) $x^2 < |x-1|$, (d) $x^2 < -|x-1|$,
(e) $x^2 < \left|x - \frac{1}{4}\right|$, (f) $|x-5| < |x-1|$, (g) $1 < |x-2| \leq 3$, (h) $|x+2||x-2| > 4$,
(i) $|x-1| < |x|$, (j) $|x| + |x+1| < 2$.

Exercice 3. Donner les intervalles que définissent les ensembles suivants :

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + x + 1 \geq 0\right\}$, (b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + x < 2\right\}$,
(c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < 0 \text{ et } x^2 + x - 6 < 0\right\}$, (d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < x^2 - 12 < 4x\right\}$,
(e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \in \mathbb{R}\right\}$, (f) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-2}{x+3} < 0\right\}$,
(g) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2x+1}{x+2} < 1\right\}$, (h) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2-4}{x-1} \geq 0\right\}$,
(i) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (2x+1)^6(x-1) \geq 0\right\}$.

Exercice 4. (a) Si $a < b$ et $c < d$, montrer que $ad + bc < ac + bd$.
(b) Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que $n^2 \geq n$, donc, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$.
(c) Si $0 < c < 1$, montrer que $0 < c^2 < c < 1$.
Si $1 < c$, montrer que $1 < c < c^2$.

Exercice 5. Simplifier l'inégalité $a^2 < ab < b^2$.

Exercice 6. (a) Montrer que $|a+b| = |a| + |b|$ si, et seulement si, $ab \geq 0$.
(b) Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $x \leq z$, montrer que $x < y < z$ si, et seulement si, $|x-y| + |y-z| = |x-z|$.
Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 7. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto |x+1| - |x| + |x-1|$.

Exercice 8. Si $E := \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}\right\}$ trouver $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 9. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ contient un de ses majorants, montrer que ce majorant est la borne supérieure de E.

Exercice 10. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide. Montrer que $u = \sup E$ si, et seulement si,

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de E, et
ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u + \frac{1}{n}$ est un majorant de E.

Exercice 11. Montrer que les nombres réels suivants sont irrationnels :

(a) $\sqrt{3}$, (b) $\sqrt{6}$, (c) $\sqrt{2} + 1$, (d) $3\sqrt{2}$, (e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Exercice 12. Montrer que si $y \in \mathbb{R}$ est irrationnel et $r \neq 0$ est rationnel, alors $r + y$ et ry sont irrationnels.

Exercice 13. Propriété des intervalles emboîtés. Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite décroissante d'intervalles fermés bornés non vides, c'est-à-dire :

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots.$$

On veut montrer qu'il existe un nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) Montrer que l'ensemble $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ a une borne supérieure qu'on dénote par x.

ii) Si $n \leq k$, montrer que $a_k \leq b_n$.

iii) Si $n > k$, montrer aussi que $a_k \leq b_n$.

iv) En déduire que l'ensemble $\{b_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré par x.

v) En déduire que $x \in I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. (a) Si $I_n := [0, \frac{1}{n}]$, montrer que si $x > 0$, alors $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$.
(b) Si $J_n :=]0, \frac{1}{n}]$, montrer que $\bigcap_{i=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

Exercice 15. Développement binaire d'un nombre réel. On appelle *chiffre* un élément de $C := \{0, 1\}$. Considérons une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de chiffres et associons lui la suite de nombres rationnels

$$s_n := \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n},$$

qu'on notera aussi $s_n := 0, a_1 a_2 \ldots a_n$.

(a) Montrer que la suite s_n est croissante et majorée. En déduire que s_n converge vers un réel $x \in [0, 1]$.

On introduit la notation : $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ et on appelle cette écriture un développement binaire de x.

(b) Fabriquons la suite $a_1 := \lfloor 2x \rfloor$, $a_2 := \lfloor 2^2 x - 2a_1 \rfloor \ldots a_n := \lfloor 2^n x - 2^{n-1} a_1 - \ldots - 2a_{n-1} \rfloor$ et ensuite $s_n := \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n}$. Montrer par récurrence que $a_n \leq 1$ (i.e. l'entier a_n est un chiffre) et $0 \leq x - s_n < \frac{1}{2^n}$.

(c) Déduire que tout nombre réel $x \in [0, 1[$ admet un développement binaire $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$

(d) Montrer que $0, 111 \ldots 11 \ldots = 1$.

Le développement binaire $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$ est unique si l'on impose la condition :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \exists\, n > N, a_n \neq 1.$$

(e) Pour montrer l'affirmation précédente, raisonnons par absurde et supposons $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$ et $a_1 = b_1, \ldots, a_{r-1} = b_{r-1}$ mais $a_r < b_r$. Montrer alors que

$$0, 0 \ldots 0 a_{r+1} \ldots - 0, 0 \ldots 0 b_{r+1} \ldots \geq 2^{-r},$$
$$\text{mais } 0, 0 \ldots 0 a_{r+1} \ldots < 2^{-r},$$

ce qui nous mène à une contradiction.

Exercice 16. Trouvez le nombre rationnel représenté par les expressions décimales périodiques

(a) $1.25137 \ldots 137 \ldots$ (b) $37.14653 \ldots 653 \ldots$.

Trouvez le nombre rationnel représenté par les expressions binaires périodiques

(c) $110.0011 \ldots 0011 \ldots$ (d) $0.100011000 \ldots 11000 \ldots$.

Exercice 17. Combien de bits (chiffres binaires) sont nécessaires pour assurer une précision de quatre chiffres décimales ?